МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.И. МЕЧНИКОВА
ИНСТИТУТ ИННОВАЦИННОГО И ПОСЛЕДИПЛОМНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ТЮРИН А.В.

ОСНОВЫ

ВЫСШЕЙ

МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ОДЕССА 2003

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный уровень развития науки приводит к тому, что в сферу университетского образования включается все больше специальностей, которые раньше носили прикладной (технический) характер. В первую очередь к таким специальностям следует отнести специальности в области компьютерных наук. Особенности подготовки студентов в университете по этим специальностям вызывают необходимость ускоренного изучения курса высшей математики, по объему приближающемуся к университетскому. Именно такую задачу и ставит перед собой данное учебное пособие по высшей математике, которое предназначено для студентов университетов, специализирующихся в области компьютерных наук. В нем читатель найдет много отлично разработанных страниц, так как курс общей математики не может быть трудом оригинальным. Причина этого в том, что курс осуществляет первый контакт с новыми знаниями и предназначен для лиц, завершивших свое школьное образование и владеющих лишь основами элементарной математики. Особенностью данного пособия является также единый методический подход к изложению всего курса по высшей математике, заключающийся в том, что основные математические понятия вытекают из общих понятий и из логических концепций со следующим распределением материала.

Курс разделен на пять книг.

Книга 1 содержит несколько логических концепций, элементарных понятий, относящихся к множествам и операции над ними (объединение, пересечение, разность, произведение), а также основные математические понятия, а именно: понятие функции или отображения; понятие n – мерного арифметического пространства.

Книга 2 отводится для линейной алгебры. Из фундаментального понятия отображения вводятся понятия внутренних и внешних законов композиции. Рассмотрены условия, при которых действия этих законов на множестве превращает их в группы, кольца, поля и векторные пространства. Изучены: поле комплексных чисел; кольцо многочленов; векторное пространство многочленов; векторное пространство свободных векторов в геометрическом пространстве; векторы в n – мерном арифметическом пространстве. Из понятий векторного пространства и линейного отображения одного векторного пространства в другое проистекают понятия матриц, определителей и системы линейных уравнений. Отдельной главой рассмотрено приведение матриц, путем замены базиса к более простой форме. Сравнительно подробно, это демонстрируется для приведения квадратной матрицы к диагональному виду, а квадратичной формы к каноническому виду.

Книга 3 содержит круг понятий аналитической геометрии требуемых программой: уравнения прямой на плоскости и в пространстве; уравнения плоскости; кривые и поверхности второго порядка, уравнения кривых и поверхностей второго порядка приводятся к каноническому виду с использованием квадратичных форм. Эти геометрические понятия выступают как непосредственное приложение книги 2 или как перенесение результатов этой самой книги на язык геометрии, так как это сделано в ней для свободных векторов в геометрическом пространстве.

Книга 4 посвящена математическому анализу. Рассмотрены числовые функции одного и многих действительных переменных. Для этих функций введены понятия предела и непрерывности. Заканчивается книга изложением дифференциального и интегрального исчисления.

В книге 5 собраны главы, относящиеся к понятиям, носящих технический характер на уровне курса общей математики, – это дифференциальные уравнения и ряды.

Изложение теоретического материала сопровождается наглядными примерами и решением типовых задач. С целью закрепления учебного материала предлагаются упражнения для самостоятельной работы.

КНИГА 1

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

ГЛАВА 1

МНОЖЕСТВА

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

Многие объекты по некоторому определенному признаку, например – объекты одной природы, могут быть объедены во множество, мыслимое нами как целое. Объекты, составляющие множество, будем называть ***элементами множества***. Множество обычно обозначают большими буквами *A, B, X*, а его элементы малыми буквами *a, в, x* . Принадлежность элемента ***x*** множеству *A* записывается $x \in A$.

Если множество содержит конечное число элементов, то такое множество называется ***конечным.***

Если же для любого наперед заданного числа β, каким бы большим оно не было, во множестве найдется количество элементов, превышающее это число β, то говорят, что такое множество ***бесконечно***. Более строгое определение бесконечного множества будет дано позже.

1.1.Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми множествами.***

Числовому множеству *P* можно поставить в соответствие переменную величину *x*, которая принимает все числовые значения этого множества, т.е. областью изменения которой являются все числовые значения множества *P*. Такое соответствие записывают следующим образом $P = \{ x \}$.

Ряд числовых множеств имеют общепринятые обозначения:

1. Множество всех натуральных чисел

$N = \{ n \}$, *где* $n = 1, 2, 3 \ldots$;

2. Множество всех целых чисел

$Z = \{ x \}$, где $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$;

Множество всех неотрицательных целых чисел

$Z_0 = \{ x \}$, где $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

3. Множество всех рациональных чисел

$Q = \left(\dfrac{m}{n} \right)$, где $m \in Z$, $n \in N$.;

4. Множество всех действительных (вещественных) чисел

$R = \{ x \}$, где $x = \pm\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$ - бесконечная десятичная дробь либо периодическая (множество рациональных чисел), либо непериодическая (множество иррациональных чисел), здесь $\beta \in Z_0$ и $\alpha_i \in Z_0$.

Множество всех положительных действительных чисел обозначается R^+, а всех отрицательных – R^-. Если к этим множествам добавляется число нуль, то будем писать соответственно R_0^+ и R_0^-.

1.2.Точечные множества геометрического пространства

Наименьшей и неделимой структурой геометрического пространства является точка. Все остальные геометрические фигуры и тела геометрического пространства рассматриваются как совокупность точек. Поэтому геометрические фигуры на плоскости, такие как отрезок, линия, многоугольник и др., а так же тела в геометрическом пространстве, например, шар, многогранник, конус и др., представляют собой точечные множества, элементами которых являются точки.

1.3.Задание множества

Задать множество, значит, указать то общее, что отделяет его элементы от остальных объектов. В большинстве случаев множество задают с помощью характеристического свойства его элементов. Под характеристическим свойством множества *A* понимают такое свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они. Если характеристическое свойство множества *A*, элементом которого является *x*, обозначить через *G(x)*, то множество записывают:

$$A = \{x | G(x)\}$$

Например, если *A* есть множество всех четных натуральных чисел, то записывают:

$$A = \{ x \,|x=2n.\ n \in N \}$$

Если два множества *A* и *B* состоят из одних и тех же элементов, то такие множества называются ***равными.*** Равенство двух множеств записывают $A=B$.

1.4. Включение. Пустое множество

Множество *A*, все элементы которого принадлежат некоторому множеству *B*, называют ***подмножеством*** или частью множества *B*. Это предложение записывают $A \subset B$ или $B \supset A$ и читают: *A* содержится (включено) в *B* или *B* содержит *A*. Знак $\subset$ называют символом ***включения***.

Подмножество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается символом $\varnothing$.

По определению принимают, что для любого множества $A : \varnothing \subset A;\ A \subset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset E,$ то $A \subset E$ - свойство транзитивности. Например, $N \subset Z \subset Q \subset R$, то $N \subset R$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$.

1.5. Логика высказываний. Теорема. Необходимые и достаточные условия

Импликация. Будем говорить, что предложение W имплицирует или влечет, а также имеет следствием предложение Q, если Q справедливо всякий раз, как справедливо W**,** и будем записывать $W \Rightarrow Q$. Если, в свою очередь, Q влечет W, то предложения W и Q называются эквивалентными; это записывается $W \Leftrightarrow Q$. Тогда в любом рассуждении одно из этих двух предложений можно заменять другим.

Кванторы. Для обозначения выражений “для всех”, “для каждого”, “каково бы ни было”, “существует”, “найдется хотя бы одно”, употребляются символы, которые называются кванторами:

Квантор общности $\forall$**:** “для всех”, “для каждого”, “каково бы ни было”.

Квантор существования $\exists$: “существует”, “найдется хотя бы одно”.

Например, утверждение, что $A \subset B$ можно записать следующим образом - $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$**.** Обратное неверно. Тот факт, что $a \in B$ не влечет, что $a \in A$**.** Предложения не эквивалентны.

Отрицание. Отрицание данного свойства представляется символом данного свойства пересеченным чертой $\not\subset, \notin, \not\Rightarrow$.

Например, утверждение, что множество F не есть часть множества B, равносильно следующему: существует такой элемент a из F, что a не принадлежит B.

$$F \not\subset B \Leftrightarrow (\exists\ a \in F \Rightarrow a \notin B).$$

Предложения эквивалентны.

Теорема. Математическое предложение, истинность которого устанавливается путем доказательства (путем рассуждения), называется ***теоремой.*** Вспомогательная теорема называется ***леммой.***

Формулировка любой теоремы состоит из двух частей: условия и заключения, которое следует из данного условия. Условие и заключение могут меняться местами: условие стать заключением, а заключение – условием. Тогда одна из этих теорем называется ***прямой***, а другая ***обратной***.

В математике встречаются теоремы с тремя различными условиями; необходимое, достаточное и необходимое и достаточное.

Необходимое условие – это условие без выполнения, которого данное утверждение неверно.

Достаточное условие – это условие, из которого следует, что данное утверждение верно.

Например: 1. Чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

Приведенное условие необходимо, но недостаточно. Действительно, если диагонали не перпендикулярны, то четырехугольник не квадрат, но если диагонали перпендикулярны, это не означает еще, что четырехугольник квадрат.

2. Если стороны четырехугольника равны, то такой четырехугольник – параллелограмм.

Это условие достаточное, но не является необходимым, т.к. и без его выполнения (стороны не равны) четырехугольник может быть параллелограммом.

Одно и то же условие может быть и необходимым, и достаточным одновременно.

Например, если в треугольнике два угла равны, то такой треугольник равнобедренный.

Данное условие ***достаточно***, т.к. теорема верна и ***необходимо***. Действительно, если в треугольнике два угла не равны, то такой треугольник равнобедренным быть не может – условие необходимо.

Необходимость и достаточность условия можно записать, используя импликацию. Если теорему рассматривать как совокупность двух предложений W и Q и если теорема верна, т.е. импликация истинная $W \Rightarrow Q$, то Q является необходимым условием для W, а W достаточным условием для Q. Если же предложения эквивалентны $W \Leftrightarrow Q$, то W является необходимым и достаточным условием для Q, наоборот Q является необходимым и достаточным условием для W.

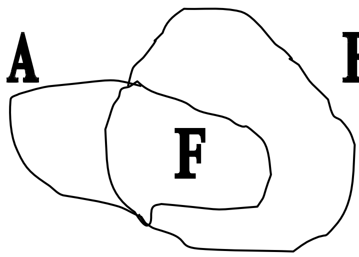
§2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

2.1. Пересечение множеств

Пусть имеются два множества A и B. Множество всех элементов x, принадлежащих одновременно A и B, составляет новое множество F**,** которое называется ***пересечением A и B*** и записывается

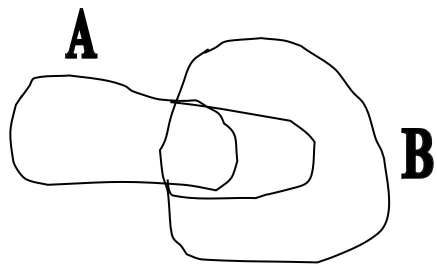
$$F = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \quad (\text{рис. } 1.1)$$

Знак $\cap$ - символ пересечения.



- $F = A \cap B$

Рис. 1.1



- $C = A \cup B$

Рис.1.2

Операция пересечения обладает следующими свойствами:

1.$A \cap B = B \cap A$ - операция $\cap$ коммутативна;

2.$(A\cap B) \cap C = A\cap (B\cap C)$ - ассоциативна;

3.$A\cap A = A$, $A\cap \varnothing=\varnothing$;

4.Если $A \subset B$, то $A\cap B = A$.

Если множества не имеют общих элементов, т.е. они не пересекаются, то $A\cap B = \varnothing$.

2.2. Объединение множеств

Пусть имеются два множества A и B. Множество C, состоящее из элементов принадлежащих A или B, т.е. принадлежащих или A или B, или A и B одновременно, называется ***объединением A и B*** и обозначается

$$C = A \cup B = \{x \mid x\in A, \text{ или } x\in B, \text{ или } x\in A \text{ и } x\in B \}.$$ (рис.1.2).

Знак $\cup$ - символ объединения.

Основные свойства операции объединения состоят в следующем:

1.$A \cup B = B \cup A$ - операция коммутативна;

2.$(A \cup B) \cup C = A\cup (B \cup C)$ - ассоциативна;

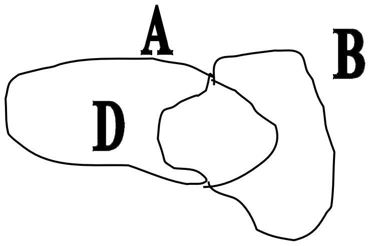
3.$A \cup A = A$, $A \cup \varnothing=A$;

4.Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$.

2.3. Разность множеств

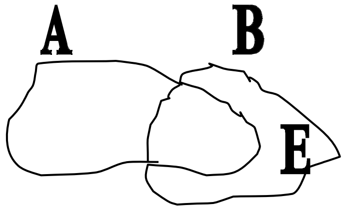
Пусть имеются два множества A и B. Множество D состоящее из элементов x множества A и не принадлежащих множеству B, называется ***разностью множеств A и B*** и обозначается:

$$D = A\backslash B =\{x \mid x\in A \text{ и } x\notin B\}$$ (рис.1.3).



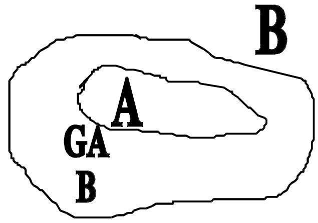
- D = A\B

Рис. 1.3



- E = B\A

Рис. 1.4



- GA = B\A
B

Рис. 1.5

Основные свойства:

1. $A\backslash B \neq B\backslash A$ - операция не коммутативна (рис.1.3 и 1.4);

2 2. $(A\backslash B)\backslash C \neq A\backslash(B\backslash C)$ - не ассоциативна;

3.Если $A \subset B$, то $A \backslash B = \varnothing$, а $B \backslash A$ составляет множество, называемое ***дополнением множества А относительно В*** и обозначаемое $C_B A = B \backslash A = \{x \mid x \in B$ *и* $x \notin A,\ A \subset B\}$ (рис. 1.5).
Имеем: $A \cup \left(C_B A\right) = B$ *и* $A \cap \left(C_B A\right) = \varnothing$,.

2.4 Произведение множеств

Пусть имеются два множества *A* и *B*. и пусть $a \in A$, $b \in B$. Рассмотрим упорядоченную пару (a, b), причем пары (a, b) и (b, a) считаются различными, даже если $A=B$. Совокупность всевозможных упорядоченных пар (*a, b*) составляет новое множество, называемое ***произведением А на В*** и обозначается $A \times B$. Элементы *a* и *b* называются ***компонентами***, или ***координатами*** пары (*a, b*).

В качестве примера на рис. 1.6 рассмотрено произведение двух точечных множеств *A* и *B* геометрического пространства.

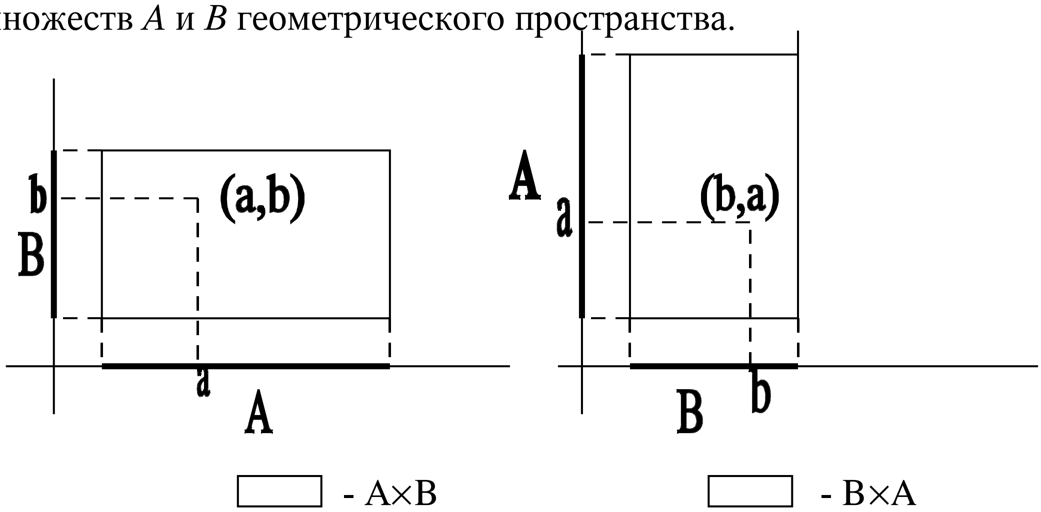


Рис. 1.6

Из рис.1.6 видно, что $A \times B \neq B \times A$ и, следовательно, произведение множеств не коммутативно.

Когда множество *B* тождественно множеству *A* ($B = A$), то $A \times A$ представляет собой множество упорядоченных пар (a, a'), где a и a′ принадлежат одному и тому же множеству *A* ($a \in A$ *и* $a' \in A$). Такое множество называется ***декартовым квадратом***. Но и в этом случае $(a, a') \neq (a', a)$. Проиллюстрируем это на примере точечных множеств (рис. 1.7).

Множество точек заштрихованной части плоскости составляет множество $A \times A$ - декартовый квадрат.

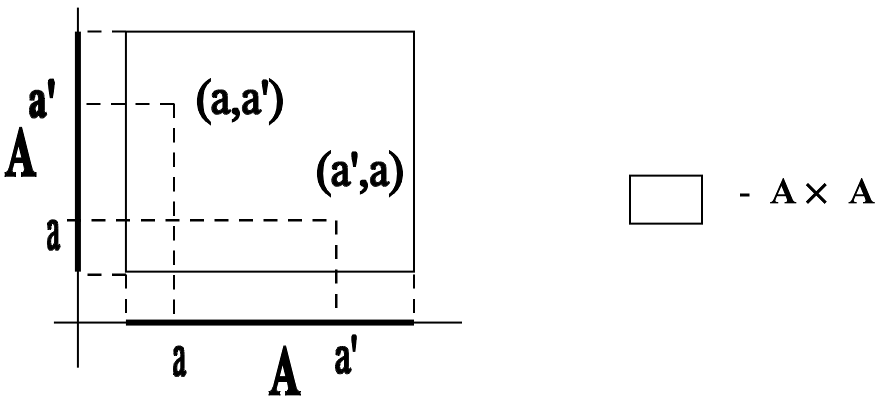


Рис. 1.7

Вообще пусть имеется совокупность множеств $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, не обязательно различных, будем называть произведением и обозначать через

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$$

множество упорядоченных систем $(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$, где i-й элемент принадлежит множеству A_i. Символ $\mathbf{\Pi}$ означает знак произведения:

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n .$$

Индекс i называется операторным индексом. Он может быть заменен любой другой буквой

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

Определение. Элемент произведения бесконечного числа множеств, равных множеству R действительных чисел называется ***числовой последовательностью.***

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \ldots) \in R \times R \times R \times \ldots \times R \times \ldots$$

ГЛАВА 2

ФУНКЦИИ, ОТОБРАЖЕНИЯ

§1. ФУНКЦИИ

Пусть имеется множество D называемое ***областью определения***. И пусть имеется множество E называемое ***областью значений***.

Определение. Соответствие, которое каждому элементу $x\in D$ относит некоторый элемент $y\in E$**,** называется ***отображением*** D в E**.**

Элемент $x\in D$ (прообраз y) называется ***переменным*** или ***аргументом***, элемент $y\in E$ называется ***значением*** или ***образом***.

Отображение называют также ***функцией***, обозначают обычно буквами f, ψ, φ и записывают $y = f(x)$. Употребляется также запись $x\to f(x)$, которая читается: элементу x соответствует элемент $f(x)$. Встречается также запись $f{:}D\to E$**,** которая читается: f есть отображение множества D во множество E**.** Еще говорят, что f есть функция переменного x со значениями в E или что $y=f(x)$ есть образ элемента x при отображении f (или посредством f).

Необходимо четко различать переменное x, которое является элементом множества D, значение функции $f(x)$, которое является элементом множества E, и операцию f, которая представляет собой категорию, отличную от двух предыдущих. В данном определении функции существенны еще два момента: во-первых, указание множества D для элементов x (т.е. области определения функции) и, во-вторых, установление правила или закона соответствия f между элементами $x\in D$ и $y\in E$. Множество же принимаемых функцией значений $f(x)$, являющееся подмножеством множества E области значения функции обычно не указывается, поскольку самый закон соответствия уже определяет это подмножество. Обозначается множество значений принимаемых функцией либо $f(D)$, либо $E(f)$;

$$f(D) = E(f)=\{\, f(x) \mid x\in D \,\} \subset E$$

и называется ***образом множества*** D при отображении f или просто ***образом отображения*** f. Итак, при отображении $f{:}\ D\to E$ не все элементы $y\in E$ обязаны быть образами какого-либо $x\in D$.

1.1. Тождественное отображение

Если $E= D$, то f определяет отображение D в (или на) себя.

Определение. Отображение, которое всякому элементу $x\in D$ ставит в соответствие тот же самый элемент, есть отображение D на D, называемое ***тождественным отображением,*** и обозначаемое e**,** т.е. e: $D\to D$ и $e(x) = x, \forall x\in D$.

1.2. График функции (отображения)

Определение. Пусть f есть отображение множества D во множество E. Множество упорядоченных пар $(x,f(x))$, где $x \in D$, а $f(x) \in E$, являющееся подмножеством произведения $D \times E$ и называется ***графиком функции*** f.

Рассмотрим это на примере точечных множеств (рис. 1.8)

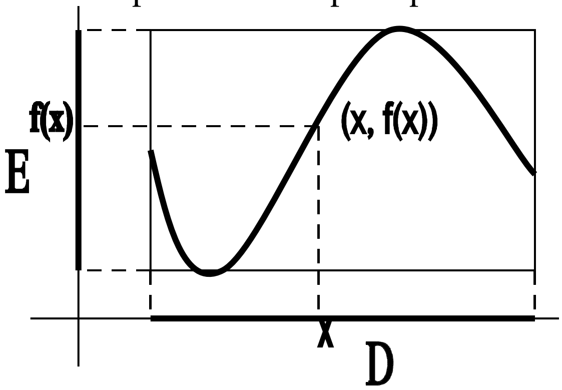


Рис. 1.8

Множество точек заштрихованной части плоскости составляет множество $D \times E$. Линия подмножество пар $(x,f(x))$ - график функции f. Отметим, что каждому значению аргумента x соответствует только одна точка $(x,f(x))$, принадлежащая графику функции f.

1.3. Последовательность элементов множества

Возьмем в качестве D множество N натуральных чисел, а в качестве E - произвольное множество.

Определение 1. Отображение f множества N во множество E называется ***последовательностью*** элементов из E.

Таким образом, последовательность f связывает каждое натуральное число n с некоторым элементом y из E, который обычно обозначают y_n или f_n, а не $f(n)$, и n называется индексом. Последовательность будет часто обозначаться $f = \{ f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots \}$, или сокращенно $f = \{f_n\}$, а элемент $f_n = y_n$ из E будем называть членом с индексом n (или n-ый член) последовательности f.

Отображение (последовательность) f может не быть однозначным: один и тот же элемент из E может служить образом многих различных чисел из N. Поэтому не следует путать выражение "последовательность $f = \{f_n\}$" с выражением "множество значений последовательности f". Множество значений последовательности $\{f_n\}$ может состоять всего из одного элемента $y = a$ из E, такие последовательности называются ***постоянные последовательности*** и обозначаются $\{a\}$, т.е. $f_n = a$, $\forall n \in N$.

Определение 2. Две последовательности $\{f_n\}$ и $\{\Psi_n\}$ из E равны, если $f_n = \Psi_n$ при всех $n \in N$.

Не следует смешивать равенство двух последовательностей и равенство множеств значений этих последовательностей. Так, рассмотрим последовательность $\{f_n\}$, определенную посредством $f_{2p} = 0$, $f_{2p+1} = 1$, где $p \in N$, т.е. $f_n = 0$, если n – четно, и $f_n = 1$, если n – нечетно, и последовательность $\{\Psi_n\}$, определенную как $\Psi_{2p} = 1$, $\Psi_{2p+1} = 0$. Эти последовательности представляют собой отображение множества N в $E = Z_0$; множество значений этих двух последовательностей одно и тоже; оно состоит из двух элементов - 0 и 1; сами же последовательности $\{f_n\}$ и $\{\Psi_n\}$ не равны.

Пользуясь понятием функции для числовой последовательности (гл. 1, § 2, п. 2.4), можно дать следующее определение.

Определение 3. Отображение f множества N натуральных чисел во множество R действительных чисел называется ***числовой последовательностью***.

Например, отображение

$$f : n \to f_n = \frac{2n^2 - 17}{\sqrt{n} + 3},$$

где $n \in N$, есть числовая последовательность, и записывается $\{f_n\} = \left\{ \frac{2n^2 - 17}{\sqrt{n} + 3} \right\}$.

Данная числовая последовательность задана таким образом, что по индексу n-го члена последовательности $\{f_n\}$можно определить и числовое значение f_n этого члена. Например, 9-й член указанной последовательности равен

$$f_9 = \frac{2 \times 9^2 - 17}{2\sqrt{9} + 3} = \frac{162 - 17}{9} = \frac{145}{9}$$

В дальнейшем именно такие ***заданные числовые последовательности*** мы и будем рассматривать.

Определение 4. Числовая последовательность $f : n \to a_n = a_1 + (n-1)d$, где $a_1 \in R$ и $d \in R$ называется ***арифметической прогрессией***. Число d называется ***разностью*** арифметической прогрессии.

Определение 5. Числовая последовательность $f : n \to a_n = a_1\, g^{n-1}$, где $a_1 \in R$ и $g \in R$ называется ***геометрической прогрессией***. Число g называется ***знаменателем*** геометрической прогрессии.

§2. ТИПЫ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим отображение f множества D во множество E. Совокупность всех образов $f(x)$, где $x \in D$ при отображении $f : D \to E$ образует подмножество во множестве E и, как было уже сказано, обозначается это подмножество $f(D)$. Тогда $f(D) = \{f(x) / x \in D\} \subset E$.

Определение 1. Если $f(D)=E$, т. е. когда всякий элемент из E служит образом хотя бы одного элемента из D, то отображение называется ***наложением*** (**сюръективным**) и говорят, что f есть отображение D на E.

И так, если $\forall y \in E \Rightarrow y = f(x)$, где $x \in D$ то f - наложение, а $E = f(D)$.

Определение 2. Отображение, при котором разные элементы множества D имеют различные образы, называется ***вложением*** (***инъективным***), т. е. если $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.1. Взаимно однозначное отображение

Определение. Отображение, которое является наложением и вложением называется ***взаимно однозначным*** (***биективным***) ***отображением***. Другими словами: всякий элемент $x \in D$ имеет образом некоторый единственный элемент $y = f(x) \in E$, а всякий элемент $y \in E$ имеет прообразом некоторый единственный элемент $x \in D$.

Для взаимно однозначного отображения операция, обратная к f, является отображением E на D, так как для $\forall y \in E$ образом является единственный элемент $x \in D$. Такое отображение называется ***обратным*** к f и обозначается f^{-1}.

Таким образом, отличительной особенностью взаимно однозначного отображения является наличие для него обратного отображения.

Например, отображение $f\colon x \to y = x^3$, где $x \in R$ есть отображение R на R и является взаимно однозначным отображением. Обратным отображением для него будет $f^{-1}\colon y \to x = \sqrt[3]{y}$, где $y \in R$. Отображение же $x \to x^2$ есть отображение R в R и не является взаимно однозначным. Так как не всякий элемент $y \in R$ является образом некоторого элемента $x \in R$, а тот элемент $y \in R$, который является образом, является образом не единственного элемента $x \in R$**:** $y = -5$ не является образом $\forall x \in R$, а $y = 4$ является образом для $x = 2$ и $x = -2$. Поэтому операция $y \to x = \pm\sqrt{y}$, обратная отображению $x \to y = x^2$, отображением не является.

2.2. Счетные множества

Определение 1. Если для множеств D и E существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение D на E, то говорят, что D и E имеют ***одинаковую мощность***, а так же, что такие множества ***эквивалентны***.

Понятие мощность служит обобщением обычного понятия счета. Действительно, счет состоит в установлении взаимно однозначного соответствия между множеством объектов и некоторым конечным множеством последовательных целых чисел, начиная с единицы.

Понятие мощность позволяет придать точный смысл понятию множества, имеющего ***бесконечное*** число элементов. Такое множество будет определено при помощи следующего свойства: ***существует хотя бы одно подмножество, отличное от всего множества и имеющее с ним одинаковую мощность***. Так, пусть N есть множество натуральных чисел; множество четных чисел составляет часть множества N, отличную от N. Но соответствие $n \to 2n$ взаимно однозначно; стало быть, эти два множества имеют одинаковую мощность, и значит, N бесконечно.

Определение 2. Множество E называется ***счетным***, если оно имеет ту же мощность, что и множество N.

Это означает, что существует взаимно однозначное отображение f множества N на E, т. е. любому $n \in N$ можно поставить в соответствие один и только один такой элемент $x \in E$, что $x = f(n)$, а $n = f^{-1}(x)$. Обычно элемент из E, соответствующий n, обозначается через x_n, а n называется индексом. Стало быть, счетное множество есть множество, все элементы которого могут быть наделены натуральными индексами. Заметим, однако, что обратное не верно; множество элементов последовательности может не быть счетным, а быть конечным. Так, последовательность, определенная посредством $x_n = 1$ при любом n, образует множество, состоящее из единственного элемента 1, а значит, это множество конечно и тем самым не может быть множеством той же мощности, что и N.

Пример счетного множества. Множество $N^{/}$ четных чисел счетно: действительно, отображение $n \to 2n$ есть взаимно однозначное отображение N на $N^{/}$.

Теорема. Произведение конечного числа конечных или счетных множеств составляет конечное или счетное множество.

Примем эту теорему без доказательства.

Следствие. Множество Q всех рациональных чисел счетно. Множество R всех действительных чисел - несчетно.

2.3. Перестановки конечного множества

Определение 1. Всякое взаимно однозначное отображение множества D на себя называется ***перестановкой*** множества D.

Пусть D конечное множество из n элементов $D = \{a_1 \dots a_n\} = \{a_i\}$, где $i = 1, 2, \dots n$. Отображение f есть перестановка для множества D, если $f(a_i) = a_j$, где $a_i \in D$ и $a_j \in D$, $i = 1, 2, \dots n$, $j = 1, 2, \dots n$. Если $i = j$, то $f(a_i) = a_i$ и имеет место тождественное отображение $(f = e)$. Таким образом, тождественное отображение всегда есть перестановка.

Число различных перестановок множества D из n элементов равно $n!$ (n факториал). $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ – произведение n последовательных натуральных чисел, начиная с единицы.

Определение 2 . Перестановка, в которой изменены места лишь двух элементов множества, называется ***транспозицией.***

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_i, \dots a_j, \dots, a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_j, \dots a_i, \dots, a_n \end{pmatrix}.$$

Всякая перестановка может быть получена из основной путем последовательных транспозиций. Выбор основной перестановки совершенно произволен. Для определенности назовем основной $a_1, a_2, \dots, a_n$ и рассмотрим произвольную перестановку f этого множества $a_i' = f(a_i)$, $i = 1, 2, \dots n$, но a_i' есть один из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ и значит $a_i' = a_{m_i}$, где $m_1, m_2, \dots, m_n$ - значения некоторой перестановки множества $1, 2, \dots n$, первых n натуральных чисел. Таким образом, следующие две перестановки эквивалентны:

$$f:\begin{pmatrix} a_1, & a_2, \ldots & a_n \\ a_{m_1}, & a_{m_2}, \ldots & a_{m_n} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, n \\ m_1, & m_2, \ldots m_n \end{pmatrix}.$$

Если в перестановке $m_1, \ldots\ldots m_n$ найдется такая пара (m_j, m_i), что $i > j$, а $m_i < m_j$, то говорят, что такая пара образует ***инверсию***

Определение 3. Общее число инверсий, образуемых всевозможными парами перестановки $m_1, m_2, \ . \ . \ . \ m_n,$ называется ***числом инверсий*** этой перестановки.

Перестановка f называется ***четной***, если число ее инверсий $\nu(f)$ четное; в противном случае она называется ***нечетной***.

Например, в перестановке

$$f:\begin{pmatrix} 1234567 \\ 3156472 \end{pmatrix}$$

число инверсий равно: (2); (0) ; (2) ; (2) ; (1) ; (1) - общее число инверсий $\nu(f) = 8$. Перестановка f четная.

Теорема. При транспозиции четность перестановки изменяется, т.е. транспозиция - нечетная перестановка.

Доказательство.

$$\tau(i,j):\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,i,\ldots,j,\ldots n \\ 1,2,\ldots,j,\ldots,i,\ldots,n \end{pmatrix}$$

$\nu (\tau (i, j)) = (j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i) - 1$ – нечетное число.

Здесь: $(j - i)$ - число инверсий для числа j после того, как его переставили; $(j - i - 1)$ – число инверсий для всех чисел, расположенных после j и стоящих перед i. Для всех же остальных чисел число инверсий не изменилось.

§ 3. СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ. ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ.

Определение 1. Пусть f есть отображение множества D на множество E (т.е. $f(D) = E$), а g - отображение множества E во множество G. И пусть $x \in D$, тогда $y = f(x) \in E$, и можно рассматривать элемент $z = g(y)$, который принадлежит G. Таким образом, каждому $x \in D$ соответствует $z = g[f(x)]$ из G, и тем самым определено отображение множества D в G, называемое ***сложной функцией***, или ***композицией*** (***суперпозицией***) отображения f на g и обозначаемое $g_0 f$ (здесь читается справа налево, а не слева на право, ибо $g_0 f$ есть $g[f(x)]$), g - называется ***внешней*** функцией, а f - ***внутренней***.

Пример. Пусть $f: x \to y = f(x) = 2^x$, где $x \in R, y \in R^+$. В этом случае f есть отображение множества R на множество R^+ и пусть $g: y \to z = g(y) = 5 - \frac{3}{y}$, где $z \in R$, и, следовательно, g есть отображение R^+ в R. Тогда $g_0 f: x \to z = {}$ $=g[f(x)] = 5 - \frac{3}{2^x} = 5 - 3 \cdot 2^{-x}$ и $g_0 f : R \to R$.

Операция композиция отображений $(_0)$ в общем случае некоммутативна: $g_0 f \neq f_0 g$, причем $f_0 g$ может не иметь смысла, поскольку f есть отображение D на E, а g - отображение E в G.

Напротив, она ассоциативна: если h есть отображение G в H, то $h_0 (g_0 f) = (h_0 g)_0 f$. Действительно, пусть $f(x) = y$, $g(y) = z$, $h(z) = \omega$; тогда $(g_0 f)(x) = g(y) = {}$ $= z$ и $[h_0(g_0 f)](x) = h(z) = \omega$; точно также $(h_0 g)_0 f(x) = [(h_0 g)(y)] = h(z) = \omega$.

Теперь с помощью композиции отображений дадим определение обратного отображения f^{-1} к отображению f.

Определение 2. Пусть даны отображения $f : D \to E$ и $\psi : E \to D$. Отображение ψ называется обратным к f и обозначается $\psi = f^{-1}$, если $\psi_0 f = f_0 \psi = e$, где e – тождественное отображение: $e(x) = x$.

Как мы уже говорили, обратное отображение существует, если f - взаимно однозначное отображение. Справедливо и обратное утверждение - если f имеет обратное отображение f^{-1}, то это взаимно однозначное отображение.

§ 4. ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ R, R× R и RxRxR НА ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

4.1. Взаимно однозначное отображение множества R действительных чисел на множество точек координатной оси

Возьмем прямую линию и зададим на ней положительное направление (обычно оно указывается стрелкой). Тогда противоположное направление будет отрицательным. Такая направленная прямая называется ***осью.*** Если на оси выбрать произвольную точку отсчета O и масштабный отрезок OE, то такая ось называется ***координатной*** или ***числовой***. Точка O называется началом координат. Обозначаются координатные оси обычно x, y, z или Ox, Oy, Oz.

Выберем на оси Ox точку M и определим ее положение. Для этого измерим масштабным отрезком OE длину отрезка OM. Длина масштабного отрезка принимается равной единице OE=1. Получим отвлеченное число $\alpha \in R_0^+$, которое будет рациональным, если масштабная единица и данный отрезок соизмеримы, и иррациональным, если они несоизмеримы.

Определение. **Координатой точки *M на числовой оси***, называется число $x \in R$ и равное длине отрезка OM $x = \alpha$, если точка M расположена в положительном направлении от начала координат и отрицательному $x = -\alpha$, если точка расположена в отрицательном направлении от начала координат. Координатой начала координат считается число нуль. Тот факт, что x есть координата точки M, записывается $M(x)$.

В этом случае между множеством R действительных чисел и множеством точек координатной оси Ox можно установить соответствие $f{:}x \to M(x)$ - это соответствие f будет взаимно однозначным отображением. Каждой точке M координатной оси Ox соответствует единственное действительное число x из R и наоборот, каждому действительному числу x из R соответствует только одна определенная точка M на координатной оси Ox. Таким образом, множество R и множество точек прямой имеют одинаковую мощность и, следовательно, являются эквивалентными. Под отображением f здесь понимается способ определения координаты точки M на координатной оси Ox.

4.2. Взаимно однозначное отображение множества R× R на множество точек координатной плоскости.

Пусть на плоскости даны две пересекающиеся координатные оси и указан их порядок расположения на плоскости, например, первая ось x, а вторая - y. Такие оси называются ***упорядоченными***. Точка пересечения осей O принимается за начало отсчета обеих осей координат. Масштабные отрезки у этих осей могут быть различными.

Углом между двумя упорядоченными осями x и y называется угол, на который нужно повернуть ось x к y, чтобы направления обеих осей совпали. Если поворот осуществляется против вращения часовой стрелки, то угол считается положительным, а если по часовой стрелке - то отрицательным. Угол между осями определяется неоднозначно. Если наименьший угол между осями обозначить через φ, то угол $\varphi+2\pi k$, где $k \in Z$, также будет углом между этими осями. Если нужно найти угол однозначно, то вносят ограничения, рассматривая, например, $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$.

Определение 1. Две пересекающиеся под углом φ упорядоченные координатные оси в точке, принятой за начало отсчета для обеих осей, составляют общую ***декартовую систему координат на плоскости*** (рис. 1.9,а).

Первая ось Ox называется осью ***абсцисс***; вторая Oy — осью ***ординат***. Плоскость называется ***координатной*** и обозначается xOy.

Определение 2. Упорядоченная совокупность двух взаимно перпендикулярных осей координат $(\varphi = \pm\ \pi/2)$ с равными масштабными отрезками $OE_1 = OE_2 = OE$ и с общим началом координат O на каждой оси называется ***декартовой прямоугольной системой координат на плоскости***.

Если $\varphi = +\ \pi/2,$ то система координат называется ***правой*** (рис. 1.9,б), если $\varphi = -\pi/2,$ то система называется ***левой*** (рис. 1.9,в).

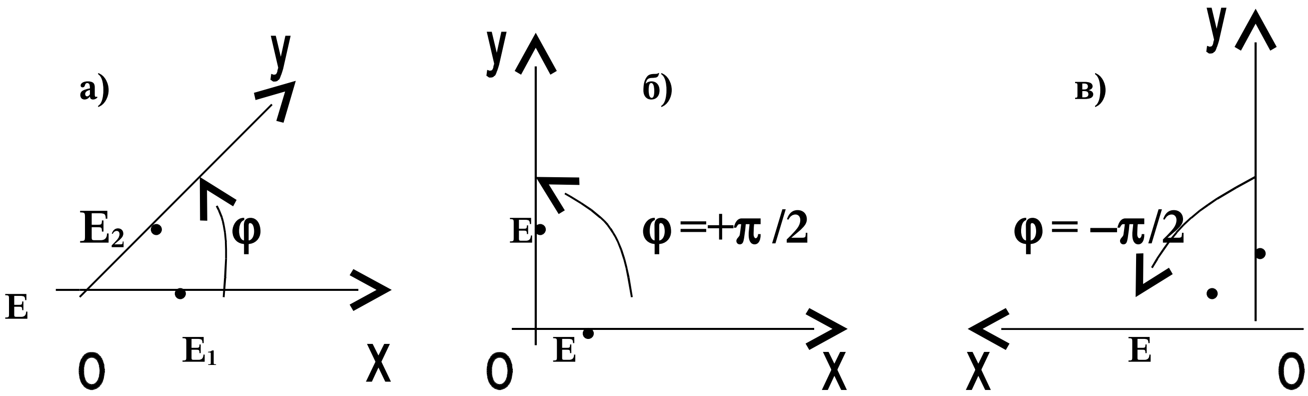


Рис. 1.9

В дальнейшем мы будем пользоваться только правой декартовой прямоугольной системой координат.

Возьмем в координатной плоскости xOy произвольную точку M и проведем через нее прямые, параллельные осям Ox и Oy (рис. 1.10). Такая операция называется ***параллельным проектированием***. Точки пересечения этих прямых с осями координат обозначим M_1 и M_2, а их координаты - соответственно через x и y. Точки $M_1(x)$ и $M_2(y)$ называются ***проекциями*** точки M на соответствующие координатные оси (рис. 1.10).

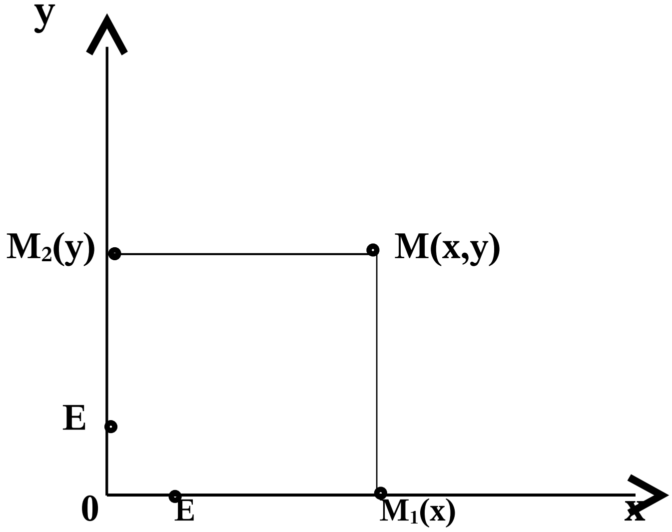


Рис. 1. 10.

В результате операции проектирования точке M поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (x,y), где $x\in R$ и $y\in R$ и, следовательно, $(x,y)\in R\times R$. Эти числа располагаются в порядке следования координатных осей, называются ***декартовыми координатами точки М на плоскости*** и записываются $M(x,y)$.

Легко видеть, что каждой точке M, расположенной в координатной плоскости xOy, соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x,y)\in R\times R$. Наоборот, каждой заданной упорядоченной паре чисел $(x,y)\in R\times R$ соответствует единственная точка M в координатной плоскости xOy. Чтобы найти ее нужно через точки $M_1(x)$ и $M_2(y)$ провести прямые, параллельные координатным осям. Точка их пересечения и есть искомая точка $M(x,y)$**.**

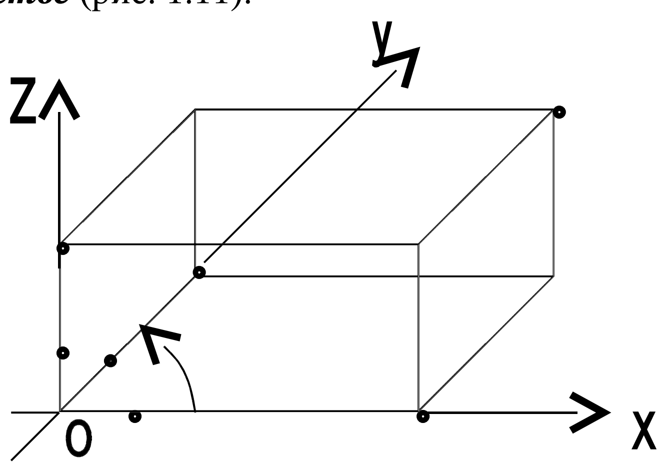
Таким образом, между множеством $R\times R$ упорядоченных пар действительных чисел и множеством точек координатной плоскости xOy установлено взаимно однозначное соответствие $(x,y) \to M(x,y)$, а значит, множество $R\times R$ и множество точек плоскости являются эквивалентными множествами.

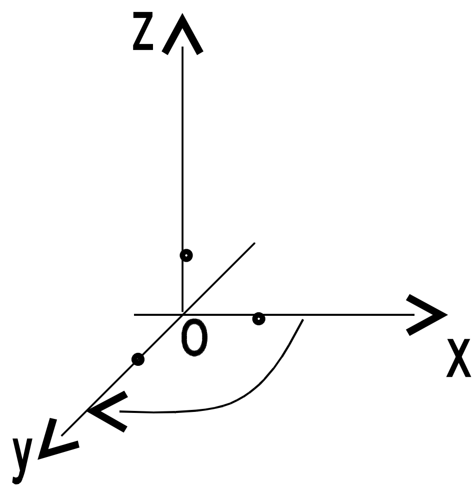
4.3. Взаимно однозначное отображение множества RxRxR на множество точек геометрического пространства в декартовой системе координат

Возьмем три упорядоченные координатные оси x, y, z , которые не лежат в одной плоскости и пересекаются в точке O. Примем эту точку за начало отсчета для всех трех координатных осей. Такая упорядоченная совокупность координатных осей называется ***общей декартовой системой координат в геометрическом пространстве***.

Определение. Упорядоченная тройка попарно перпендикулярных осей координат с общим началом координат O на каждой из них и с одним и тем же масштабным отрезком $OE=1$ для каждой координатной оси, называется

декартовой прямоугольной системой координат в геометрическом пространстве (рис. 1.11).





M(x,y,z)

M_3(z)

E E

E E M_2(y)

E

E M_1(x)

Рис.1.11,а Рис.1.11,б

Первая ось называется осью *Ox,* или осью ***абсцисс***, вторая – осью *Oy*, или осью ***ординат***, третья – осью *Oz,* или осью ***аппликат***. Плоскость, проходящая через две оси из трех *Ox, Oy, Oz* называется ***координатной плоскостью***; координатных плоскостей – три; они обозначаются так: *xOy, yOz* и *zOx.*

Упорядоченная тройка координатных осей, не лежащих в одной плоскости, называется ***правой***, если из конца положительного направления оси O_Z кратчайший поворот от оси O_X к оси O_Y виден против часовой стрелки (рис.1.11,а). В противном случае система координат называется ***левой*** (рис.1.11,б). Мы будем пользоваться только правой системой координат.

Пусть *M* – произвольная точка пространства. Проведем через нее плоскости, параллельные координатным плоскостям (рис.1.11,а). Точки пересечения плоскостей с соответствующими координатными осями обозначим через M_1, M_2, M_3, а их координаты – *x, y, z.* Такую упорядоченную тройку чисел $(x, y, z) \in R \times R \times R$ называют ***декартовыми координатами точки M в геометрическом пространстве***, а точки $M_1(x), M_2(y), M_3(z)$ – проекциями точки *M* на координатные оси и записывают *M(x,y,z).*

Очевидно, каждой точке геометрического пространства соответствует в декартовой системе координат единственная упорядоченная тройка чисел. Справедливо и обратное утверждение: каждой упорядоченной тройке чисел в декартовой системе координат соответствует единственная точка пространства. Чтобы найти ее нужно через точки $M_1(x), M_2(y), M_3(z)$ провести плоскости параллельные соответствующим координатным плоскостям. Прямые пересечения этих плоскостей пересекаются в точке, которая и есть искомая точка *M(x,y,z).*

Таким образом, в декартовой системе координат установлено взаимно однозначное отображение множества $R \times R \times R$ упорядоченных троек действительных чисел на множество точек геометрического пространства: $(x, y, z) \to M(x,y,z)$, т.е. можно сказать, что множество $R \times R \times R$ и множество точек геометрического пространства эквивалентны. Это отображение осуществляется посредством декартовой системы координат и способа определения координат точки.

В случае произведения $R \times R \times R \times \ . \ . \ . \times R$, с числом сомножителей $n > 3$, точечных множеств в геометрическом пространстве, эквивалентных этим множествам, не существует, ввиду отсутствия у нас интуиции пространства с числом измерений, большим трех. Однако, желая распространить геометрические методы и на произведения множеств R, числом большим трех, вводят понятие n – мерного арифметического пространства R^n и при $n > 3$.

ГЛАВА 3

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbf{R^n}$

Точкой M арифметического пространства является упорядоченная совокупность из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, называемых координатами точки M, т. е. $M = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ (или $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$). Само же арифметическое пространство составляет множество всех мыслимых точек M. Число n координат точки M, определяемое количеством сомножителей в произведении $RxRxRx \ldots xR$, называется ***размерностью арифметического пространства***. Обозначается n – мерное арифметическое пространство R^n.

Например: ***одномерное*** арифметическое пространство R^1. Точкой M этого пространства является число $x \in R$, т.е. $M = (x)$. В геометрическом пространстве пространство R^1 отображается прямой; **двумерное** пространство R^2. Точкой M этого пространства является упорядоченная пара чисел $(x_1, x_2) \in R \times R$, т.е. $M = (x_1, x_2)$. В геометрическом пространстве пространство R^2 отображается плоскостью; ***трехмерное*** пространство R^3 отображается на все геометрическое пространство и точка $M = (x_1, x_2, x_3) \in RxRxR$**.** Дальнейшее соответствие арифметического пространства R^n,у которого размерность $n > 3$ с геометрическим пространством не возможно и эти пространства наглядностью не обладают.

§1. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

В арифметическом пространстве R^n по аналогии с геометрическим пространством вводится понятие "расстояния" между точками $M_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $M_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, обозначаемое $d\,(M_1, M_2)$. Если это "расстояние" определяется формулой

$$d\,(M_1, M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots (y_n - x_n)^2}, \qquad (3.1)$$

то такое арифметическое пространство называется ***евклидовым***. В этом случае для $n \le 3$ "расстояние" между точками в арифметическом пространстве совпадает с расстоянием между точками в геометрическом пространстве.

В n – мерном евклидовом арифметическом пространстве, как и в геометрическом пространстве, можно вводить понятия "линии", "фигуры", "тела" и т.п.

Например. 1. Множество точек $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых независимо одна от другой удовлетворяют неравенствам

$$a_1 \le x_1 \le в_1,\ a_2 \le x_2 \le в_2, \ldots, a_n \le x_n \le в_n,$$

называется ***замкнутым*** n – мерным прямоугольным "параллелепипедом" и обозначается так:

$$[\,a_1, в_1;\ a_2, в_2;\ \ldots;\ a_n, в_n\,] = \{\,M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a_i \le x_i \le в_i,\ i = 1, 2, \ldots n\,\}$$

Если имеет место строгое неравенство $a_i < x_i < в_i$, то "параллелепипед" называется ***открытым***.

При $n \le 3$ n-мерный прямоугольный "параллелепипед" имеет реальные геометрические представления. Если n = 1 и $a \le x \le в$, то такой замкнутый одномерный прямоугольный "параллелепипед" называется ***сегментом***, обозначается $[\,a, в]$ и геометрически изображается отрезком. Открытый одномерный "параллелепипед" $(a < x < в)$, называется ***интервалом*** и обозначается $(a, в)$.

В случае n = 2 закрытый двумерный прямоугольный "параллелепипед" $(a \le x \le в,\ c \le y \le d)$ геометрически представляется прямоугольником со сторонами $в - a$ и $d - c$.

Трехмерный (n=3) закрытый прямоугольный "параллелепипед" $a \le x \le в, , c \le y \le d, f \le z \le l$ геометрически изображается обыкновенным прямоугольным параллелепипедом со сторонами $в - a$, $d - c$ и $l - f$.

2. Множество точек $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемое неравенством

$$(x_1 - y_1^0)^2 + (x_2 - y_2^0)^2 + \ldots + (x_n - y_n^0)^2 \le r^2 \ (\text{или} < r^2\,),$$

где $M_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ есть постоянная точка, а r положительное постоянное число, образует ***замкнутый*** (или ***открытый***) n – мерный "шар" радиусом r, с центром в точке M_0**.** Иными словами, "шар" есть множество точек M, расстояние которых от некоторой постоянной точки M_0 не превосходит (или меньше) r. Ясно, что этому “шару” при $n=1$ отвечает отрезок , при $n=2$ - круг, а при $n=3$ – обыкновенный шар.

Открытый “ шар ” любого радиуса $r > 0$ с центром в точке M_0 $(y_1^0, y_2^0, \ldots , y_n^0)$ можно также рассматривать как ***окрестность*** радиуса r или r – ***окрестность*** этой точки. При n=1 окрестность точки x_0 радиуса r представляет собой интервал с центром в этой точке и обозначается (x_0-r, x_0+r).

Все изложенное в этом параграфе нужно рассматривать как установление лишь некоего геометрического языка; с этим не связано (при $n>3$) никаких реальных геометрических представлений, поэтому все геометрические термины, которые употреблялись в смысле, отличном от обычного, мы помещали в кавычках: “расстояние”, “прямоугольный параллелепипед”, “шар”. Впредь мы этого делать уже не будем.

§2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА R^1

Тот факт, что между множеством R действительных чисел (пространством R^1) и множеством точек координатной оси установлено взаимно однозначное соответствие (гл.2, §4, п.4.1.) дает возможность с достаточной наглядностью проиллюстрировать основные свойства множества действительных чисел.

2.1. Свойство упорядоченности

Для любых двух действительных чисел x_1 и x_2 имеет место одно, и только одно, из соотношений:

а) $x_1 = x_2$ - точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на координатной оси совпадают;

б) $x_1 > x_2$ - точка $M_1(x_1)$ на координатной оси расположена справа от точки $M_2(x_2)$;

в) $x_1 < x_2$ - точка $M_1(x_1)$ на координатной оси расположена слева от точки $M_2(x_2)$.

Знаки **>** (больше) и **<** (меньше) обладают транзитивным свойством. Из $x_1 > x_2, x_2 > x_3$ следует, что $x_1 > x_3$ и из $x_1 < x_2, x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3$.

2.2. Свойство плотности

Каковы бы ни были два действительных числа x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$, всегда найдется число x_3, заключенное между ними: $x_2 > x_3 > x_1$.

Чисел x_3 бесчисленное множество, более того, среди них имеется также бесчисленное множество рациональных чисел. Действительно, точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ являются концами отрезка $M_1 M_2$,, длина $d(M_1 M_2)$ которого отлична от нуля, и по формуле (3.1.) равна $x_2 - x_1$. Выберем на координатной оси произвольную точку M_3, координату которой обозначим x_3. Потребуем, чтобы точка $M_3(x_3)$ не совпадала с точкой $M_2(x_2)$ и рассмотрим отношение

$$\frac{d(M_1M_3)}{d(M_3M_2)}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3} \qquad (3.2)$$

Если это отношение равно любому положительному числу λ из R^+, то из свойства упорядоченности множества R, следует, что точка $M_3(x_3)$ находится внутри отрезка M_1M_2 и, значит, $x_1<x_3<x_2$ (при условии, что $x_2> x_1$).

Таким образом, для всех $\lambda\in R^+$ точка M_3 с координатой

$$x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad (3.3)$$

находится внутри отрезка M_1M_2, т.е. $x_1<x_3<x_2$ (если $x_2> x_1$) и таких точек бесчисленное множество, т.к. λ - любое число из R^+.

Формула (3.3), которая получена из (3.2.), при условии, что $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}=\lambda$, называется ***формулой деления отрезка в заданном отношении.***

2.3. Свойство непрерывности (сплошности)

Осуществим разбиение множества R на два не пустых множества P , и P^1 и пусть при этом выполняются следующие условия:

1. Каждое действительное число попадает в одно и только в одно из множеств P, P^1.
2. Каждое число α множества P меньше каждого числа α^1 множества P^1.

Такое разбиение называется ***сечением***. Множество P называется ***нижним классом*** сечения, множество P^1 - ***верхним классом***. Сечение обозначается P/P^1. Для сечения в области действительных чисел справедлива следующая теорема.

Теорема. Для всякого сечения P/P^1 в области действительных чисел существует действительное число β, которое производит это сечение. Это число β будет:

1) либо наибольшим в нижнем классе P (и тогда в верхнем классе P^1 нет наименьшего),
2) либо наименьшим в верхнем классе P^1 (тогда в нижнем классе P нет наибольшего).

Действительно, т.к. $x\to M(x)$ взаимно однозначное отображение, а на координатной оси нет пробелов между точками, являющимися образами действительных чисел, и поэтому сечение всегда приходится на точку координатной оси, которая служит образом действительного числа β, осуществляющего сечение множества R.

2.4. Абсолютное значение

Пусть x есть некоторое число из R. Для него из трех возможных случаев $x<0,\ x=0,\ x>0$ имеет место только один. Теперь мы определим отображение $x\to f(x)$, следующим образом. Положим $f(x)=x$, если $x\geq 0$ и $f(x)=-x$, если $x<0$. Тогда отображение (функция) $x\to f(x)$, называется ***абсолютным значением*** или ***модулем*** числа x и $f(x)$ обозначается $|x|$, т.е. $f(x)=|x|$.

Геометрически модуль действительного числа x равен расстоянию от начала координат 0 до точки M, изображающей данное число x на координатной оси, т.е. $|x| = 0M$ (гл.2,§4.п.4.1).

Абсолютное значение обладает следующими тремя свойствами: каковы бы ни были числа $\beta\in R,\ \gamma\in R,$ всегда

1. $|\beta| \geq 0,$ и $|\beta| = 0 \Leftrightarrow \beta = 0;$
2. $|\beta\,\gamma| = |\beta|\,|\gamma|;$
3. $|\beta+\gamma| \leq |\beta| + |\gamma|$

Последнее неравенство называется неравенством треугольника.

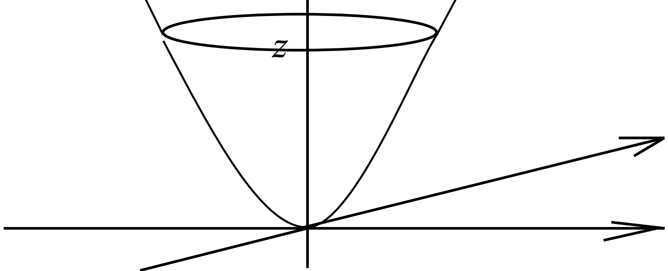
§3. ОТОБРАЖЕНИЯ R^n В R; ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим множество D точек $M=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из R^n. Если на этом множестве D определена функция f со значением в R, т.е. $\forall M\in D$ ставится в соответствие некоторое число $y\in R$, то такая функция называется ***числовой функцией действительных переменных*** и обозначается $y=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Если $D\subset R$, то функция f, определенная на D, называется ***числовой функцией одного действительного переменного***. В этом случае переменное x и значение $y=f(x)$ функции f принадлежит одному и тому же пространству R^1. График такой функции - множество точек в пространстве R^2 с координатами $(x, f(x))$. В геометрическом пространстве - это линия в координатной плоскости$_x$ xOy.

Отметим также, что последовательность действительных чисел (гл.2, §1.п.1.3) есть последовательность значений числовой функции определенной на множестве N, и, следовательно, у которой роль переменного выполняет натуральное число n, взятое в порядке возрастания.

Когда $D\subset R^2$, то функция f, определенная на D, называется ***числовой функцией двух действительных переменных***. В этом случае переменное - это точка из R^2, т.е. упорядоченная пара (x, y), а значение $z=f(x, y)$ функции f - число из R. График такой функции - множество точек из пространства R^3 с координатами $(x, y, f(x, y))$: в геометрическом пространстве - это поверхность. Например: $z = ax + by + c$ - плоскость; $z=\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}$, где a >0 и b >0 - эллиптический параболоид (рис.1.12).



y

O x

Рис.1.12

Функция f, определенная на $D \subset R^n$ (n ≥ 2), называется ***числовой функцией многих действительных переменных***. В этом случае значение функции y из R, обозначается: $y = f(x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n)$. Например, $f(x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n) = a_1x_1 + + a_2x_2 + \ . \ . \ . + a_nx_n$ - линейная функция.

Наглядного графика в геометрическом пространстве у таких функций (n>2) не существует.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Изобразить на плоскости $A \cap B$, если:
   а) $A = \{M(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, $B = \{M(x,y) \mid y \ge x^2\}$;
   б) $A = \{M(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 25\}$, $B = \{M(x,y) \mid |x| \le 7, |y| \le 4\}$.

Доказать, что операция пересечения множеств ассоциативна.

2. Определить все элементы множества $A \times B$, если $A = B = \{a, в\}$.
3. Какие из следующих соответствий являются отображениями $f: R \to R$? а) $x \to \sqrt{x}$; б) $x \to tg\, x$; в) $x \to \sin x$.
4. Найти множество $D \subset R$, чтобы следующие соответствия являлись отображениями $f: D \to R$: а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \ln x$; в) $f(x) = \beta^{x}$, $\beta > 0$ и $\beta \ne 1$.
5. Рассмотрим систему координат на плоскости. Каждой точке плоскости поставим в соответствие ее проекцию на ось O_X. Является ли это отображение: а) отображением на ось Ox; б) взаимно однозначным отображением?
6. Найти $f(R)$, если :
   а) $f(x) = x^2$, $\forall x \in R$; б) $f(x) = (0{,}3)^x$, $\forall x \in R$; в) $f(x) = \cos x$, $\forall x \in R$.
7. Построить все отображения множества $A = \{a, b, c\}$ в себя и выбрать среди них перестановки множества A.
8. В треугольнике с вершинами $A(2, -1)$, $B(5, 3)$, $C(-6, 5)$ найти длину биссектрисы угла A.

9. Определить число инверсий в перестановке

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

10. Является ли множество $A = \{ \frac{m}{n} | m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N} \}$ счетным?
11. Определить все точки на числовой оси, координаты x которых удовлетворяют неравенству: а) $| 2x-7 | < 5$; б) $| x^2 - 4x -5 | > x^2 - 4x -5$.
12. При каком условии отображения $f: x \to y = \sqrt{x}$ и $g : y \to z = 5^y$ могут образовать сложную функцию $g_0 f : x \to z = 5^{\sqrt{x}}$.
13. Найти множества D и E, для которых следующие числовые функции одного действительного переменного имеют обратные функции: а) $y = x^2$; б) $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$; в) $y = \sin x$.